

UNCERTAINTY  
RELATIONS  
FOR ENERGY AND TIME

V. P. KRAINOV

*Uncertainty relations are the fundamental properties of quantum mechanics. They state limits of precision for simultaneous measurements of some pairs of physical quantities. These relations are the internal properties of quantum systems. The aim of this paper is to make some explanations of this problem on the base of modern quantum-mechanical approaches.*

**Соотношения неопределенности являются фундаментальными соотношениями квантовой механики, устанавливающими предел точности одновременного определения некоторых пар физических величин. Они представляют собой следствие свойств квантовых систем, внутренне присущих им. Задача статьи – разъяснить их с позиции современных квантово-механических подходов.**

© Крайнов В.П., 1998

**СООТНОШЕНИЯ  
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ  
ДЛЯ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЕНИ**

В. П. КРАЙНОВ

Московский физико-технический институт,  
Долгопрудный Московской обл.

**ВВЕДЕНИЕ**

Соотношения неопределенности были открыты немецким физиком В. Гейзенбергом в 1927 году. Согласно этим соотношениям, невозможно определить одновременно точно значения обоих членов пар физических величин, характеризующих рассматриваемую атомарную систему. Под выражением *неопределенность данной физической величины* в математическом смысле понимается статистическая флуктуация результата измерения около его среднего значения. Например, неопределенность координаты частицы определяется соотношением

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2},$$

где угловые скобки обозначают квантово-механическое среднее от величины, стоящей внутри скобок. Величина под корнем всегда неотрицательна, так как среднее квадратичное значение  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  больше или равно среднему арифметическому значению  $\langle x \rangle$ .

Под словом *пары* понимаются независимые переменные, соответствующие преобразованию Фурье для волновой функции рассматриваемой системы. Простейший пример – это координата частицы  $x$  и ее импульс  $p$  в каком-либо направлении. Результат Гейзенберга опирается на тот математический факт, что протяженность волны (характерный размер, на котором амплитуда волны, то есть волновая функция, существенно отлична от нуля) и ее образа Фурье (характерный разброс волновых чисел в волне) в соответствующих пространствах не могут быть сделаны одновременно сколь угодно малыми. Именно,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1)$$

Здесь введена постоянная Планка  $\hbar = 1,054 \times 10^{-34}$  Дж · с. Она появляется вследствие того, что, согласно формуле де Бройля, импульс частицы  $p$  равен произведению постоянной Планка на волновое число  $k$ , то есть  $p = \hbar k$  (это соотношение лежит в основе корпускулярно-волнового дуализма квантовой механики, связывая свойства частицы и волны друг с другом). Именно волновое число появляется непосредственно при преобразовании Фурье какой-либо функции, зависящей от координаты. Те же

математические рассуждения справедливы и при преобразовании Фурье функции времени (рис. 1), где компонента Фурье есть функция частоты.

Как мы видим, соотношение неопределенности имеет не только качественный, но и количественный характер. Оно доказывается с помощью элементарного математического неравенства

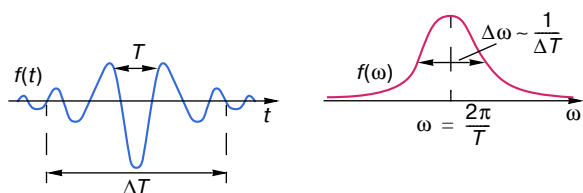
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi + \alpha \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx \geq 0$$

при любом значении  $\alpha$ . Здесь  $\psi$  – волновая функция частицы, квадрат модуля которой определяет вероятность нахождения ее в данной точке  $x$ . Это предлагается сделать читателю в качестве упражнения. Нужно только знать, что в квантовой механике оператор импульса определяется формулой  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .

Соотношение (1) означает, что невозможно точно определить импульс частицы, не потеряв при этом информацию о ее координате (или наоборот). Конечно, в связи с малостью постоянной Планка соотношение неопределенности представляет интерес только для микросистем, где существенны атомные размеры или еще меньшие.

Тем самым статистическое описание в квантовой механике для отдельной частицы и таковое в классической статистической физике для ансамбля частиц существенно различаются. Действительно, в классической статистической физике можно одновременно произвольно выбирать распределения по координатам и импульсам как по независимым друг от друга переменным. Перемножая эти два распределения, мы получим распределение частиц в пространстве их координат и импульсов. В квантовой механике это невозможно ввиду корреляции между обоими распределениями, диктуемой соотношением неопределенности (1).

Таким образом, соотношение неопределенности (1) для координаты и импульса вытекает непосредственно из законов квантовой механики для отдельных микрочастиц, являясь в этом смысле вещью в себе, и не требует конкретизации какого-либо меха-



**Рис. 1.** Функция  $f(t)$ , зависящая от времени (временной волновой пакет) и ее компонента Фурье  $f(\omega)$ , зависящая от частоты.  $T$  – характерный период функции,  $\Delta T$  – ширина волнового пакета,  $\omega = 2\pi/T$  – несущая частота,  $\Delta\omega \sim 1/\Delta T$  – разброс компоненты Фурье по частоте

низма взаимодействия этих частиц с измерительным прибором, а также сложного обсуждения вопроса, является ли измерительный прибор полностью классическим или квантовым и т.п.

## СОТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ

Подобно тому как импульс не может быть локализован в пространстве, так и энергия не может быть локализована во времени. Однако обоснованные соотношения

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2)$$

и смысл величин, содержащихся в нем, существенно отличаются, как мы увидим ниже, от того, что было выше с координатой и импульсом (в отличие от (1) здесь неравенство понимается иногда по порядку величины, а не точно). Обычно соотношение (2) трактуется как невозможность точного определения энергии квантовой системы за ограниченный интервал времени.

Для его обоснования часто ссылаются на соотношение  $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1$ , связывающее неопределенность  $\Delta\omega$  в частоте  $\omega$  квазимонохроматического излучения с промежутком времени  $\Delta t$ , в течение которого это измерение производится (рис. 1). Однако в квантовой механике величина  $\hbar\omega$  соответствует не энергии системы, а разности энергий квазиклассических уровней (так называемый принцип соответствия). Поэтому указанное обоснование теряет силу.

Соотношение (2) отличается от (1) тем, что в (1) речь идет о неопределенностях в импульсе и координате *в заданный момент* времени, в то время как в (2) – о неопределенности в энергии и времени *при заданном значении координаты*.

Эта статья посвящена анализу соотношения (2), различным физическим ситуациям, в которых оно проявляется, и роли измерительного прибора, что принципиально отличается от механизма мысленных измерений при рассмотрении соотношения (1) для координаты и импульса, обсуждаемых в многочисленных учебниках по квантовой механике.

В основе рассмотрения лежит тот факт, что энергия замкнутой квантово-механической системы, вообще говоря, не имеет определенного значения – она меняется со временем. Постоянной является только вероятность найти то или иное значение энергии. В этом и состоит закон сохранения энергии в квантовой механике в отличие от классической механики, где энергия сохраняется со временем. Конечно, только для стационарных состояний энергия квантовой системы является сохраняющейся величиной. В качестве иллюстрации Н. Бор обратил внимание на невозможность определить в квантовой механике понятие монохроматической волны в данный момент времени, так как

вероятность ее нахождения во всех точках пространства одинакова.

Благодаря существованию соотношения неопределенности (2) возможны так называемые виртуальные переходы, происходящие с нарушением второго постулата Бора, то есть с энергией фотона, отличной от разности энергий начального и конечного состояний системы. Например, переход из возбужденного  $2s$ -состояния атома водорода в основное  $1s$ -состояние может происходить путем испускания двух фотонов самых различных энергий: эти переходы идут виртуально через различные возбужденные  $p$ -состояния. А сумма энергий этих фотонов хотя также может отличаться от разности энергий начального и конечного состояний, но весьма незначительно: в меру разброса энергий, определяемого из соотношения (2), где в данном случае неопределенность во времени представляет собой время жизни возбужденного состояния  $2s$ .

В трех последующих разделах обсуждаются различные ситуации, где проявляется соотношение неопределенности энергия–время.

## ДВИЖЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Рассматриваемая в этом разделе задача о прохождении волнового пакета через заданную точку на оси принципиально отличается от задачи измерения момента времени прохождения рассматриваемой частицы через эту точку, так как точка является классическим объектом, а волновой пакет — квантовым.

Рассмотрим движение одномерного волнового пакета, имеющего длину  $\Delta x$  и групповую скорость (скорость центра тяжести пакета)  $v$ . Момент времени прохождения определенной точки на оси  $X$  не может быть указан точно; неопределенность в нем имеет порядок  $\Delta t \approx \Delta x/v$ . Волновой пакет не имеет определенного значения импульса, а характеризуется лишь средним его значением, отчего возникает неопределенность в значении энергии частицы  $\Delta E \approx v \cdot \Delta p$ . По порядку величины это соотношение справедливо не только для свободной частицы, но и для частицы, находящейся в поле внешних сил. Перемножая два указанных соотношения почленно и используя (1) получим (2).

Чтобы проверить соотношение (2) на опыте, требуется проконтролировать изменение со временем функции распределения для координаты  $x$ . Задачу следует ставить таким образом, что в начальный момент времени имеется не один, а много образцов квантовой системы, причем все они приготовлены (мысленно) одинаково [1]. Через время  $\Delta t$  на каждом образце производится опыт по определению значения координаты в этот момент времени. Статистика полученных результатов позволяет найти функцию распределения значения координаты (в этот же момент времени  $\Delta t$ ). Таким образом,

можно вычислить среднее значение координаты и ее дисперсию  $\Delta x$  в данный момент времени.

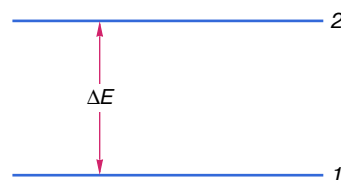
Чтобы получить аналогичную функцию распределения для какого-либо более позднего момента времени, нужно все начать сначала: привести все образцы к исходному начальному состоянию и начать опыт через больший интервал времени, нежели  $\Delta t$ . Сравнив полученные таким образом функции распределения для различных моментов времени, можно сделать экспериментальное заключение о ширине и скорости сдвига максимума волнового пакета и тем самым обо всех величинах, входящих в (2).

Итак, величина  $\Delta t$  не имеет никакого отношения к продолжительности измерения только *одного* волнового пакета, то есть движение волнового пакета не может быть проконтролировано при помощи опыта, производимого над одним пакетом и протекающего во времени (об этом речь будет идти во второй части статьи). Отметим, что неопределенность энергии системы  $\Delta E$  имела место и в начальный момент времени и не изменилась за время  $\Delta t$ . Резюмируя, можно сказать, что в данном случае соотношение (2) относится к *начальному* состоянию квантовой системы и к его *статистике* [2].

## ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА

Предположим теперь, что квантовая система состоит из двух состояний и  $\Delta E$  — разность энергий этих состояний (рис. 2). Квантовое состояние системы есть суперпозиция этих состояний. Распределение вероятностей найти квантовую систему в одном из двух состояний осциллирует между крайними значениями за время  $\Delta t$ , определяемое из соотношения (2). Таким образом, это время является характеристическим для эволюции физических свойств системы [2]. Статистические распределения результатов измерений, проведенных в два различных момента времени, будут практически одинаковыми, если разность этих времен меньше, чем величина  $\Delta t$ , определяемая из соотношения (2).

Иными словами, чтобы свойства системы заметно изменились за время  $\Delta t$ , необходимо, чтобы оно удовлетворяло неравенству (2). Разумеется, этот результат справедлив и при наличии не двух, а нескольких уровней в рассматриваемой системе,



**Рис. 2.** Квантово-механическая двухуровневая система с уровнями 1 и 2 и расстоянием  $\Delta E$  между ними

причем величина  $\Delta E$  есть типичное расстояние между этими уровнями.

Как и при рассмотрении предыдущего примера, здесь речь идет об изменении состояния квантовой системы согласно уравнению Шрёдингера, но не об изменении состояния, связанного с актом измерения (см. ниже). Формула (2) в данном случае предсказывает время перехода из одного состояния в другое, однако ничего нельзя сказать, как наблюдать такой переход экспериментально (об этом речь будет идти ниже).

### ВРЕМЯ ЖИЗНИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Возбужденные состояния атомов, радиоактивные ядра и другие квантовые системы не являются стационарными состояниями: они могут распадаться в нижележащие состояния, например испуская спонтанно фотон электромагнитного поля, либо туннелировать через потенциальный барьер в присутствии внешнего постоянного поля и т.п. Тогда соотношение (2) также справедливо, но входящие в него величины имеют другой смысл, чем в предыдущем разделе. Величина  $\Delta t$  представляет собой среднее время жизни возбужденного состояния, испытывающего обычно экспоненциальный распад (например, это время, за которое вероятность нахождения частицы в данном возбужденном состоянии уменьшится с единицы до половины). А величина  $\Delta E$  есть неопределенность в энергии рассматриваемого квазистационарного возбужденного состояния.

Указанная неопределенность возникает лишь из-за мнимой части энергии, представляющей собой величину  $\Delta E \approx \hbar w/2$ , где  $w$  есть вероятность распада рассматриваемого состояния в единицу времени (например, вероятность туннельной ионизации или вероятность спонтанного перехода в нижележащее состояние). Конечно, начальное состояние может быть приготовлено так, что вещественная часть энергии не имеет определенного значения, а есть некоторое распределение по энергии около среднего значения (например, набор близких, перекрывающихся ридберговских состояний атома) с определенной шириной распределения. Следует подчеркнуть, что эта последняя ширина не имеет никакого отношения к соотношению неопределенности (2) [3].

Виртуальное поглощение фотонов лежит в основе процесса многофотонной ионизации атомов [4] полем сильного лазерного излучения. В этом случае время  $\Delta t$ , определяемое из соотношения (2), ничтожно мало, так как оно определяет время виртуального перехода из одного квантового состояния системы в другое при поглощении фотона (более детально этот вопрос см. в статье [4]). Его типичная оценка составляет около  $10^{-16}$  с. Это время в сотни миллионов раз меньше типичного времени жизни атома в возбужденном состоянии, определяемого (при отсутствии или в слабом поле лазерного излу-

чения) его спонтанным распадом. Однако в случае воздействия сильного лазерного излучения время жизни атома может уменьшиться до указанной выше оценки времени виртуального перехода.

### ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

До сих пор речь шла о неопределенности энергии как вещи в себе, то есть никак не связанной с процессом измерения этой энергии, а определяемой из уравнения Шрёдингера для данной квантово-механической системы.

Мы рассмотрим, с какой точностью можно измерить энергию квантовой системы с помощью некоторого абстрактного классического прибора, взаимодействующего с этой системой. При этом не будем обсуждать, какой вид имеет это взаимодействие и как математически характеризовать совокупность классической и квантовой систем. Пусть в некоторый момент времени энергия квантовой системы равна  $E$ , а энергия классического прибора равна  $\epsilon$ . Через момент времени  $\Delta t$  производится измерение этих энергий с результатами  $E'$  и  $\epsilon'$  соответственно. Совокупность квантовой системы и классического прибора является замкнутой системой. Применяя к ней соотношение (2), получим

$$\Delta|E + \epsilon - E' - \epsilon'| \Delta t \geq \hbar. \quad (3)$$

Итак, чем меньше интервал времени между измерениями, тем большее изменение энергии будет зафиксировано. Это соотношение показывает, что в квантовой механике закон сохранения энергии выполняется не точно, а лишь приближенно, если речь идет о попытке измерить степень его точности. Еще раз подчеркнем, что в каждый данный момент времени энергии как квантовой системы, так и классического прибора могут быть измерены в принципе абсолютно точно и по отдельности. Поэтому разность энергий в левой части формулы (3) отнюдь не является неопределенностью суммарной энергии квантовой системы и классического прибора в какой-то данный момент времени, а представляет собой разность двух точно измеряемых значений этой энергии в разные моменты времени [5].

Можно предположить (хотя и без определенной степени доказательности), что энергия измерительного прибора всегда известна точно и никакой неопределенности в ее значении не существует. Тогда из (3) получим соотношение, относящееся только к квантовой системе:

$$\Delta(E - E') \geq \hbar. \quad (4)$$

В качестве классического прибора может фигурировать, например, пробная частица, с которой упруго сталкивается рассматриваемая квантовая частица. Из закона сохранения импульса при столкновении следует, что  $p' + P' - p - P = 0$ . Для простоты мы ограничиваемся одномерным движением.



Величины без штриха относятся к значениям до столкновения, а со штрихом — после столкновения. Считая, что импульсы пробной частицы  $p$  и  $p'$  известны точно, то есть никаких погрешностей в их измерениях не существует, получим из последнего соотношения, что погрешности импульса квантовой частицы до и после акта измерения совпадают, то есть  $\Delta P' = \Delta P$ . Так как  $\Delta E = v\Delta P$ , где  $v$  — скорость квантовой частицы, то из (4) получим окончательно

$$|(v - v')\Delta P|\Delta t \geq \hbar. \quad (5)$$

Здесь  $v, v'$  — скорости квантовой частицы соответственно до и после столкновения с пробной частицей, имитирующей классический прибор. В трехмерной задаче столкновения компоненты скорости и импульса частицы в (5) относятся по отдельности к каждой проекции.

Соотношение (5) было получено впервые Н. Бором (1928). Оно означает, что чем короче измерение, тем к большему изменению скорости квантовой частицы оно приводит.

Выше мы рассматривали измеряемое значение энергии с точки зрения квантово-механических уравнений безотносительно к возможности наблюдения этого измерения. Здесь же рассматривается совершенно другая величина — значение энергии, создаваемое в процессе ее измерения классическим прибором.

### ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИМ ПРИБОРОМ

Недостаток изложения в предыдущем разделе связан с неопределенностью понятия взаимодействия между квантовой системой и классическим прибором. Более последовательно можно поступить вставив перед классическим прибором промежуточное звено — квазиклассический мысленный прибор, например квантовую частицу, но с большой массой. Тогда можно говорить только о взаимодействии квантовой системы с квазиклассическим прибором, забыв о необходимости далее снимать показания квазиклассического прибора истинно классическим прибором.

Задача при этом упрощается, так как требуется решить замкнутую квантово-механическую задачу о совокупности квантовой и квазиклассической систем, взаимодействующих друг с другом через какой-либо потенциал взаимодействия (например, два связанных квантовых осциллятора (маятника) с разной массой). Такая задача детально обсуждается в обзоре [6].

Весьма простой пример квантовой системы — это одномерный квантовый осциллятор. Весьма простой пример квазиклассической измеряющей системы также квантовый прибор — осциллятор, но с гораздо большей массой. Взаимодействие между этими осцилляторами может быть различным. Если оно зависит от координаты квантового осциллято-

ра, то из решения уравнения Шрёдингера следует (см. вывод в [6]), что соотношение (4) справедливо, то есть *невозможно* измерить энергию квантового осциллятора за конечное время без изменения ее начального значения.

Однако если, например, взаимодействие есть величина, пропорциональная энергии квантового осциллятора и координате квазиклассического прибора — осциллятора, то *возможно* точное измерение энергии квантового осциллятора без изменения ее начального значения (то есть при  $E = E'$ ). При этом соотношение (3) выполняется за счет увеличения возмущения энергии квазиклассического прибора — осциллятора  $\Delta \varepsilon \geq \hbar/\Delta t$ . В общем случае, когда есть обе погрешности — в энергии квантового осциллятора  $\Delta E$  и в энергии квазиклассического прибора — осциллятора  $\Delta \varepsilon$ , они оказываются связанными между собой простыми соотношениями [6]:

$$\Delta E \cdot \Delta \varepsilon \geq \left(\frac{\hbar}{\Delta t}\right)^2, \quad \Delta E + \Delta \varepsilon \geq \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (6)$$

Следует также отметить, что возможность точного измерения энергии квантового объекта требует также и нетривиального метода измерения. При непрерывном измерении, например, координаты осциллятора во времени предельная точность измерения оказывается низкой и мы возвращаемся к (4), то есть нельзя измерить энергию квантового осциллятора за конечное время без изменения его начальной энергии. Однако есть более тонкий метод измерения координаты осциллятора, называемый стробоскопическим [6]. Он основан на том, что, хотя координата квантового осциллятора в два каких-то последовательных момента времени не может быть измерена точно, такое измерение возможно спустя половину периода колебаний. Только при таком методе измерения можно достичь выполнения неравенств (6).

### ОБРАЗОВАНИЕ СЛЕДА В КАМЕРЕ ВИЛЬСОНА

В качестве примера применений соотношений неопределенности рассмотрим образование следа в камере Вильсона при пролете через нее быстрого электрона, скорость которого велика по сравнению со скоростями атомных электронов. Этот электрон на своем пути ионизует атомы, образующиеся ионы являются центрами конденсации пересыщенного пара в камере, конденсированные капельки пара фотографируются. Электрон является измеряемой квантовой системой, атомы газа в камере — промежуточным измеряющим звеном, играющим роль квазиклассического прибора, а световые фотоны — классического прибора.

Такой электрон обладает вполне определенной энергией. Тогда на первый взгляд с точки зрения соотношения неопределенности (2) для энергии и времени удивительно, как быстродействующая фотокамера может фотографировать его в различные

моменты времени в течение пролета через камеру Вильсона по последовательному появлению капелек пара (при этом, конечно, мы отвлекаемся от технического вопроса о задержке по времени, связанной с классическим процессом конденсации пара).

Для упрощения задачи допустим, что в камере имеются только два атома, на которых неупруго рассеивается быстрый электрон, приводя к их ионизации. Расстояние между атомами предполагается большим по сравнению с их размерами. До первого соударения электрон рассматривается как плоская монохроматическая волна де Бройля с точно заданной энергией. После первого соударения он превращается в волновой пакет. Однако расплывание этого пакета со временем мало вследствие малости длины волны де Бройля быстрого электрона.

Вероятность ионизации обоих атомов может быть рассчитана в рамках второго порядка квантово-механической теории малых возмущений (в первом порядке эффект отсутствует). При этом процесс ионизации отнюдь не является каскадным, то есть ионизация каждого атома не является независимой одна от другой. Как из квантово-механических расчетов [7], так и из принципа неопределенности энергия–время следует, что вероятность двойной ионизации отлична от нуля только в направлении движения быстрого электрона, в узком интервале углов порядка  $\hbar/pa \ll 1$ , где  $a$  – характерный размер атома, а  $p$  – импульс этого электрона. Это и дает объяснение прямолинейности следа в камере Вильсона и возможности его фотографирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Толкование соотношения неопределенности энергия–время, как мы видим, гораздо сложнее, чем для импульса и координаты. Это обусловлено тем, что последнее легко получается из стандартного аппарата квантовой механики [2, 5] и не требует рассмотрения физического процесса во времени. Для анализа соотношения неопределенности энергия–время важно, можно ли пользоваться уравнением Шрёдингера, является ли измерительный прибор классическим или квазиклассическим и каков механизм взаимодействия между рассматриваемой квантовой системой и квазиклассичес-

ким измерительным прибором. Решение уравнения Шрёдингера дает теорию косвенных измерений, в которых первоначальный измерительный квазиклассический прибор включен в измеряемую систему, а прямое измерение производится уже другим, чисто классическим прибором (пример этого мы видели при измерении в камере Вильсона, см. предыдущий раздел). Взаимодействие между квантовой системой и квазиклассическим измерительным прибором может быть детально изучено путем решения уравнения Шрёдингера для такой совместной системы из взаимодействующих частей. Но, правда, остается вопрос, как рассмотреть прямое измерение показаний квазиклассического прибора чисто классическим прибором. Он довольно сложен и требует специального математического аппарата [8].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мандельштам Л.И., Тамм И.Е.* Соотношение неопределенности энергия–время в нерелятивистской квантовой механике // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1945. Т. 9, № 1/2. С. 122–128.
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. М.: Наука, 1978. Т. 1.
3. *Крылов Н.С., Фок В.А.* О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // ЖЭТФ. 1947. Т. 17, вып. 2. С. 93–107.
4. *Делоне Н.Б.* Многофотонные процессы // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 3. С. 75–81.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989. С. 193–197.
6. *Воронцов Ю.И.* Соотношение неопределенности энергия – время измерения // Успехи физ. наук. 1981. Т. 133, вып. 2. С. 351–365.
7. *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. С. 242–247.
8. *Нейман Дж. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

\* \* \*

Владимир Павлович Крайнов, профессор Московского физико-технического института, доктор физико-математических наук. Область научных интересов – теория взаимодействия сильных электромагнитных полей с атомами и молекулами. Автор более 200 статей, а также шести монографий и учебников, изданных в США и Германии.